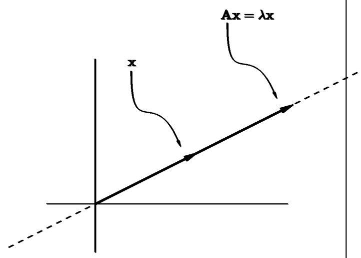
Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori Neka je $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ skup svih $m\times n$ matrica čiji su elementi realni brojevi. *Svojstveni vektor* matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ je nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da $Av = \lambda v$ za neki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. *Svojstvena vrijednost* od A je skalar λ takav da $Av = \lambda v$ za neki nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$. Bilo koji takav par, (λ, v), se naziva *svojstveni par* matrice A. Skup svih različitih svojstvenih vrijednosti, označavamo sa $\sigma(A)$.



- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ je singularna $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\{x \neq 0 \,|\, x \in \ker(A - \lambda I)\}$ je skup svih svojstvenih vektora pridruženih λ-di. Vektorski prostor $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I) := \{x \,|\, (A - \lambda I)x = 0\}$ se naziva *svojstveni prostor* matrice A.
- Za kvadratnu matricu A, broj $\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ se naziva *spektralni prečnik* od A.

1. Dat je operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisan na sljedeći način

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y \\ x + 5y \end{pmatrix}.$$

Odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti operatora f.

2. Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 17 & -10 & -5 \\ 45 & -28 & -15 \\ -30 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom i jednačina

- *Karakteristični polinom* matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Stepen od $p(\lambda)$ je n, i vodeći član u $p(\lambda)$ je $(-1)^n\lambda^n$.
- *Karakteristična jednačina* za A je $p(\lambda) = 0$.
- Svojstvena vrijednosti za A su rješenja karakteristične jednačine ili, ekvivalentno, korijeni karakterističnog polinoma.
- Iako matrica A ima n svojstvenih vrijednosti, neke svojstvene vrijednosti mogu biti kompleksni brojevi (čak iako su elementi matrice A realni brojevi), a neke svojstvene vrijednosti se mogu ponoviti.
- Ako matrica A sadrži samo realne brojeve, tada njezine kompleksne svojstvene vrijednosti se moraju pojaviti u konjugovanim parovima - tj., ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$.

3. Data je matrica

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti karakteristični polinom matrice A, kao i odgovarajće svojstvene prostore.

Rješenje-upute: (b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$; $\sigma(A) = \{1 + i, 1 - i\}$; $\ker(A - (1 + i)I) = \mathrm{span}\{(i, 1)^\top\}$; $\ker(A - (1 - i)I) = \mathrm{span}\{(-i, 1)^\top\}$. $\square$

Višestrukost Neka je $\sigma(A)$ skup svih (različitih) svojstvenih vrijednosti matrice A, i neka je $\lambda \in \sigma(A)$. *Algebarska višestrukost* od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma matrice A). Drugim riječima, $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda_i) = a_i$ ako i samo ako je $(x-\lambda_1)^{a_1}...(x-\lambda_s)^{a_s} = 0$ karakteristična jednačina matrice A. U slučaju kada je $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda) = 1$, λ se naziva *jednostavna svojstvena vrijednost*. *Geometrijska višestrukost* od λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, $\operatorname{geo\,mult}_A(\lambda)$ je maksimalan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih matrici λ.

4. Odrediti algebarske i geometriske višestrukosti svojstvenih vrijednosti matrice

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Zadana je matrica

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ a & 2 & -3 \\ b & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ i algebarske višestrukosti (algebarske kratnosti) svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Sličnost

- Za dvije $n \times n$ matrice A i B kažemo da su *slične* kadgod postoji nesingularna matrica P takva da je $P^{-1}AP = B$. Proizvod $P^{-1}AP$ se naziva *transformacija sličnosti* na A.

- **Fundamentalni problem.** Za datu kvadratnu matricu A, svesti je na najjednostavniju moguću formu primjenom transformacija sličnosti.

6. Neka je data $n \times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice A, koje ne moraju biti različite, sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$, i pretpostavimo da su $v_1, v_2, ..., v_n$ linearno nezavisni. Pokazati da tada vrijedi

$$P^{-1}AP = D$$

gdje su

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & ... & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dijagonabilnost Neka je data matrica $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Za matricu A kažemo da je *dijagonabilna* ako postoji invertibilna matrica P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, sa elementima iz $\mathbb{R}$. Drugim riječima, za kvadratnu matricu A kažemo da je dijagonabilna kadgod je slična dijagonalnoj matrici.

7. Dijagonalizitati matricu

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

(tj. odrediti invertibilnu matricu P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, za koju vrijedi da $P^{-1}AP = D$, gdje je D dijagonalna matrica sa elementima iz $\mathbb{R}$).

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Pretpostavimo da je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrica oblika

$n \times n$ čiji su elementi iz $\mathbb{R}$. Pretpostavimo dalje da postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da $Av = \lambda v$. Tada kažemo da je λ <u>svojstvena vrijednost</u> matrice A, a da je v <u>svojstveni vektor</u> koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost $n \times n$ matrice A, a da je v svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. Tada je $Av = \lambda v = \lambda I v$, gdje je I $n \times n$ jedinična matrica, pa je $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$. Kako je $v \in \mathbb{R}^n$ nenula, slijedi da moramo imati

$$\det(A - \lambda I) = 0. \qquad \dots (1)$$

Drugim riječima, moramo imati

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Primjetimo da je (1) polinomijalna jednačina. Rješavajući jednačinu (3) dobićemo svojstvene vrijednosti matrice A.

S druge strane, za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A, skup

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)v = 0\} \quad \ldots (2)$$

je jezgro matrice $A - \lambda I$, podprostor od $\mathbb{R}^n$.

Polinom (1) nazivamo <u>karakteristični polinom</u> matrice A. Za bilo koji korijen λ polinoma (1), prostor (2) nazivamo <u>svojstveni prostor</u> koji odgovara svojstvenom prostoru λ.

(#) Data je operator $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana na sljedeći način

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3y \\ x+5y \end{pmatrix}$$

Odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti operatora f.

Rj.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3y \\ x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Trebamo odrediti broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i nenula vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ takve da

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Drugim riječima

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}^{= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \ldots (*)$$

Kako je v nenula vektor

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &(3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0 \\ &\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \\ &(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \end{aligned}$$

Ako zamjenimo $\lambda = 2$ u $(*)$ dobićemo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = 0, \quad \text{sa korijenom} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t, \; t \in \mathbb{R}$$

Ako zamjenimo $\lambda = 6$ u $(*)$ dobićemo

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \quad \text{sa korijenom} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \; s \in \mathbb{R}$$

Svojstveni parovi operatora f su $\left(2; \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ i $\left(6; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(#) Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{pmatrix}.$$

Rj.:

Trebamo odrediti brojeve $\lambda \in \mathbb{R}$ i nenula vektore $v \in \mathbb{R}^3$ takve da

$$Av=\lambda v$$

$$Av-\lambda v=0$$

$$(A-\lambda I)v=0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & -12 \\ 0 & -13-\lambda & 30 \\ 0 & -9 & 20-\lambda \end{pmatrix}=0$$

tražene svojstvene vrijednosti

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$$

(a) Svojstvene vektore koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti -1 ćemo dobiti rješenjem sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} v=0 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t\in\mathbb{R},\ t\neq 0$$

(b) Za $\lambda_2=2$

$$(A-2I)v=\begin{pmatrix} -3 & 6 & -12 \\ 0 & -15 & 30 \\ 0 & -9 & 18 \end{pmatrix} v=0 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ s\in\mathbb{R},\ s\neq 0$$

(c) Za $\lambda_3=5$, $(A-5I)v=\begin{pmatrix} -6 & 6 & -12 \\ 0 & -18 & 30 \\ 0 & -9 & 15 \end{pmatrix} v=0 \Rightarrow v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} u,\ u\in\mathbb{R},\ u\neq 0$

Odgovarajući svojstveni prostori su $V_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $V_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ i $V_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ (geometrijski predstavljaju prave koje prolaze kroz koordinatni početak).

#) Odrediti svojstvene vrijednosti i opisati odgovarajuće svojstvene prostore matrice

$$A=\begin{pmatrix}17 & -10 & -5\\ 45 & -28 & -15\\ -30 & 20 & 12\end{pmatrix}$$

Rj.

$Av=\lambda v$

$Av-\lambda v=0$

$(A-\lambda I)v=0$

$\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix}17-\lambda & -10 & -5\\ 45 & -28-\lambda & -15\\ -30 & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}2-\lambda & -10 & -5\\ 2-\lambda & -28-\lambda & -15\\ 2-\lambda & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -10 & -5\\ 1 & -28-\lambda & -15\\ 1 & 20 & 12-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(\lambda+3)(\lambda-2)^2$$

Tražene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=-3$ i $\lambda_2=2$.

(a) Svojstveni vektor (vektori) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -3 je rješenje sistema

$$(A+3I)v=\begin{pmatrix}20 & -10 & -5\\ 45 & -25 & -15\\ -30 & 20 & 15\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}s,\ s\in\mathbb{R},\ s\neq0$$

(b) Za $\lambda_2=2$ imamo

$$(A-2I)v=\begin{pmatrix}15 & -10 & -5\\ 45 & -30 & -15\\ -30 & 20 & 10\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}t,\ v_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}u.$$

$t\in\mathbb{R}$, $t\neq0$ $\quad u\in\mathbb{R}$, $u\neq0$

Odgovarajući svojstveni prostori su $\mathcal{V}_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ (prava kroz koordinatni početak), dok je svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=2$ $\mathcal{V}_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$, ravan kroz koordinatni početak.

(#) Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Odrediti karakteristični polinom matrice A, kao i odgovarajuće svojstvene prostore.

Rj:

$\det(A-\lambda I)=0$ je karakteristični polinom

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)-3 = \lambda^2-8\lambda+12$$

$(\lambda-2)(\lambda-6)=0$ je traženi karakteristični polinom

Prema prethodnom zadatku odgovarajući svojstveni parovi su $\left(2; \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ i $\left(6; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 2 je

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 6 je

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Prisjetimo se:

Prostor $\{ v \in \mathbb{R}^n \mid (A-\lambda I)v = 0 \}$ se naziva svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

(#) Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost matrice A, kojoj odgovara svojstveni vektor v. Pokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi $A^n v = \lambda^n v$.

Rj.:

Pokažimo da $A^k v = \lambda^k v$ za $\forall k \in \mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $Av = \lambda v$ ((λ, v) je svojstveni par matrice A)

$k=2$: $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$

Tvrdnja vrijedi za $k=1$ i $k=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da jednakost $A^k v = \lambda^k v$ vrijedi za svaki k od 1 do n (uključujući i n tj. $A^n v = \lambda^n v$) i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da vrijedi $A^{n+1} v = \lambda^{n+1} v$.

$$A^{n+1} v = A(A^n v) \underset{\text{pretpostavci}}{\overset{\text{prema}}{=}} A(\lambda^n v) = \lambda^n (Av) = \lambda^n (\lambda v) = \lambda^{n+1} v$$

ZAKLJUČAK

Jednakost je točna za svaki prirodan broj n.

(#) Neka je $Sim_{n\times n}(\mathbb{R})$ prostor svih simetričnih matrica čiji su elementi realni brojevi i neka je $A \in Sim_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pokazati da ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ različite svojstvene vrijednosti matrice A kojima, redom, odgovaraju svojstveni vektori v_1 i v_2 tada je $v_1 \perp v_2$.

Rj.

$$v_1 \perp v_2 \iff \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \iff v_1^T v_2 = 0$$

$$\lambda_1 (v_1^T \cdot v_2) = \lambda_1 v_1^T \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1)^T \cdot v_2 = (A v_1)^T \cdot v_2 = v_1^T A^T v_2 =$$

$$= v_1^T A v_2 = v_1^T \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1^T v_2) \Rightarrow$$

A simetrična matrica $\iff A^T = A$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1^T v_2) = 0 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longrightarrow} v_1^T \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

(#) Pokazati da su svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice A realni brojevi.

Rj.

Neka je $u \in \mathbb{C}$ svojstveni vektor od A sa svojstvenom vrijednošću λ. Tada imamo

$$Au = \lambda u \quad / \text{primjenimo konjugovano kompleksnu operaciju}$$

$$\overline{Au} = \overline{\lambda u}$$

$$\bar{A}\,\bar{u} = \bar{\lambda}\,\bar{u}$$

$$A\bar{u} = \bar{\lambda}\,\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} \text{ je svojstveni vektor od } A.$$

Prema definiciji svojstvenog vektora, svojstveni vektor je različit od nule, a kako je

$$\langle u, \bar{u} \rangle = u^T u = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 > 0$$

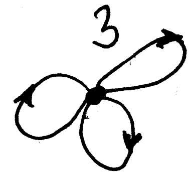
to su u i $\bar{u}$ dva različita svojstvena vektora matrice A.

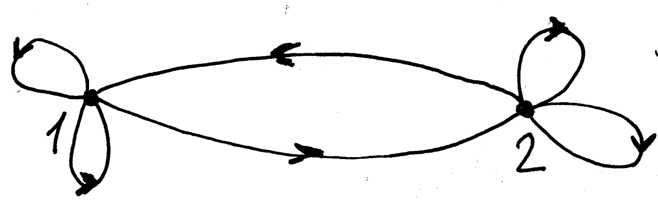
Prema prethodnom zadatku ako su u i $\bar{u}$ svojstveni vektori matrice A kojima odgovaraju različite svojstvene vrijednosti λ i $\bar{\lambda}$ tada je $u \perp \bar{u}$

#kontradikcija

Možemo zaključiti $\lambda = \bar{\lambda}$.

(#) Odrediti algebarske i geometrijske višestrukosti svojstvenih vrijednosti orjentisanog grafa Γ.





graf Γ

Rj: Svojstvena vrijednost grafa Γ je u stvari svojstvena vrijednost matrice susjedstva grafa Γ.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Algebarska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$.</u>

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=3$ a njihove odgovarajuće višestrukosti su

$$\operatorname{alg\,mult}_A(1)=1 \qquad \operatorname{alg\,mult}_A(3)=2$$

<u>Geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je dimenzija prostora $\ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, $\operatorname{geo\,mult}_A(\lambda)$ je maksimalni broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih λ.</u>

$\ker(A-\lambda I)$ su vektori iz općeg rješenja sistema $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{rang}\overline{(A-\lambda I)} = \operatorname{rang}(A-\lambda I) = 2$$

1 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \text{geo mult}_A(1) = 1$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1 = s$, $x_3 = t$, $s,t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \text{geo mul}_A(3) = 2$$

Odrediti algebarske i geometrijske višestrukosti svojstvenih vrijednosti matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

te opisati odgovarajuće svojstvene prostore.

Rj.

Algebarska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{I_k+(II_k+III_k)} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 2-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda-2)^3$$

Matrica A ima samo jednu svojstvenu vrijednost $\lambda = 2$.

$$\operatorname{alg\,mult}_A(2) = 3$$

Geometrijska višestrukost svojstvene vrijednosti λ je $\dim \ker(A-\lambda I)$. Drugim riječima, $\operatorname{geo\,mult}_A(\lambda)$ je maksimalni broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ.

Za $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ 2 promjenjive uzimamo proizvoljno $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-2s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$geo\,mult_A(2) = 2$$

Svojstveni vektori koji odgovaraju $\lambda = 2$ su $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svojstveni prostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ je $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dimenzije dva (ravan kroz koordinatni početak).

(#) Zadana je matrica

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ i algebarske višestrukosti (algebarske kratnosti) svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Rj.

λ - svojstvena vrijednost, v - svojstveni vektor

$Av = \lambda v$

$Av - \lambda v = 0$

$(A - \lambda I)v = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ a & -7-\lambda & b \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Iz postavke zadatka znamo da za $\lambda = \pm 1$ imam $\det(A - \lambda I) = 0$

tj. za $\lambda = 1$:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ a & -8 & b \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{II_k + III_k \cdot (-2)}{\overset{I_k + III_k \cdot 3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ a+3b & -2b-8 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ a+3b & -2b-8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(\cancel{-12b} - 48 + 4a + \cancel{12b}) = (-1)(-48+4a) = 48 - 4a = 0$$

$$4a = 48$$

$$a = 12$$

Za $\lambda = -1$

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12 & -6 & b \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{II_k + III_k \cdot 2}{\overset{I_k + III_k \cdot (-3)}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12-3b & 2b-6 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 12-3b & 2b-6 \end{vmatrix} = 16b - 48 +$$

$$+ 48 - 12b = 0$$

$$4b = 0$$
$$b = 0$$

Time smo dobili da je $a = 12$, $b = 0$ i $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 12 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Odredimo svojstvene vrijednosti matrice A.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 12 & -7-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 12 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Prema tome, svojstvene vrijednosti matrice A su $-1, 0$ i 1 a odgovarajuće algebarske višestrukosti su

$$\operatorname{alg\,mult}_A(-1) = 1, \quad \operatorname{alg\,mult}_A(0) = 1, \quad \operatorname{alg\,mult}_A(1) = 1.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ a & 2 & -3 \\ b & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$$\operatorname{alg\,mult}_A(1) = 2, \quad \operatorname{alg\,mult}_A(-1) = 1$$

Problem dijagonalizacije

Neka je data matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Za matricu A kažemo da je dijagonabilna ako postoji invertibilna matrica P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica, sa elementima u $\mathbb{R}$.

PROCES DIJAGONALIZACIJE. (dokaz da je proces tačan i da vodi ka rješenju pogledati u postavke i rješenja prvih nekoliko zadataka koji slijede)

Pretpostavimo da je data matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Provjerimo da li su n korijena karakterističnog polinoma $\det(A-\lambda I)$ realni brojevi.

(2) Ako nisu, tada matrica A nije dijagonabilna. Ako jesu, tada odredimo svojstvene vektore koji odgovaraju ovim svojstvenim vrijednostima. Provjerimo da li možemo pronaći n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.

(3) Ako ne možemo, tada A nije dijagonabilna. Ako možemo, tada napišimo

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice A, a $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ su redom njihove odgovarajući svojstveni vektori. Tada $P^{-1}AP = D$.

(#) Neka je data $n\times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ i pretpostavimo da su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, koje ne moraju biti različite, sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, i pretpostavimo da su $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Pokazati da tada vrijedi

$$P^{-1} A P = D$$

gdje

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Rj. Kako su $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni, slijedi da oni formiraju bazu za $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

pa se $\forall u \in \mathbb{R}^n$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \text{gdje su } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \dots (1)$$

i vrijedi

$$Au = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_n A v_n = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n. \quad \dots (2)$$

Ako sa α označimo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ tada se (1) i (2) mogu napisati redom kao

$$u = \underline{P\alpha} \quad i \quad Au = P\begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \alpha_n \end{pmatrix} = PD\alpha$$

pa imamo

$$AP\alpha = PD\alpha$$

Primjetimo da je $\alpha \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Ovo povlači da je $(AP - PD)\alpha = 0$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Time moramo imati $AP = PD$. Kako su kolone od P lin. nez $\Rightarrow$ P je invertibilna. Time $P^{-1}AP = D$, što je i trebalo pokazati

(#) Dijagonalizirati matricu $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ (tj. odrediti invertibilnu matricu P, sa elementima iz $\mathbb{R}$, za koju vrijedi da $P^{-1}AP=D$, gdje je D dijagonalna matrica sa elementima iz $\mathbb{R}$).

Rj: Prisjetimo se

Ako je $A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ čiji su svojstveni parovi $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2), \dots, (\lambda_n, v_n)$ gdje svojstvene vrijednosti λ_i ne moraju biti različite, a odgovarajući svojstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ su linearno nezavisni, tada

$$P^{-1}AP=D$$

gdje $P=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ v_1 & v_2 & \dots & v_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$ i $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

U jednom od prethodnih zadataka smo izračunali da su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1=2$ i $\lambda_2=6$ sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$ i $v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.
Kako su v_1 i v_2 linearno nezavisni to vrijedi da je,

$$P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

i $P^{-1}AP=D$.

(#) Za matricu A odrediti matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rj.

$Av = \lambda v$

$Av - \lambda v = 0$

$(A - \lambda I)v = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2 + 4$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

(a) $\lambda_1 = -2i$ $\quad 1-4i^2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+2i & -5 & 0 \\ 1 & -1+2i & 0 \end{array}\right] \overset{I_v (1-2i)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -5+10i & 0 \\ 1 & -1+2i & 0 \end{array}\right] \overset{I_v : 5}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1+2i & 0 \\ 1 & -1+2i & 0 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 + (-1+2i)x_2 = 0$$

jednu promjenjivu uzimamo proizvoljnu npr. $x_2 = s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2i)s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} s, \; s \in \mathbb{R}, \; s \neq 0$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$ svojstveni vektor koji odgovara svojstv. vr. $\lambda_1 = -2i$

(b) $\lambda_2 = 2i$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-2i & -5 & 0 \\ 1 & -1-2i & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix} t, \; t \in \mathbb{R}, \; t \neq 0$$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 2i$

Tražena matrica P je $P = \begin{bmatrix} 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(#) Odrediti realan broj a tako da matrica $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix}$ ima svojstveni vektor $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Može li se matrica A dijagonalizirati?

Rj:

$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, neka je λ svojstvena vrijednost koja odgovara svojstvenom vektoru v. Tada

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i^2 + 1 \\ 2i^2 + a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a-2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ a = 2 \end{matrix}$$

Dobili smo da je $\lambda = 0$, $a = 2$, $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$.

Provjerimo - odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A:

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & 1 \\ 2i & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{2i} - i\lambda - 2\lambda + \lambda^2 \cancel{-2i} = \lambda^2 + (-i-2)\lambda = \lambda(\lambda + (-i-2))$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = i + 2$

Za $\lambda_1=0$ imamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 2i & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v+I_v(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$x_1 i + x_2 = 0$

1 promjenjiva uzimamo proizv. npr. $x_1 = s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -is \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}, \; s \neq 0$$

Ako za s uzmemo i imamo $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 0$.

Za $\lambda_2 = i+2$ imamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2i & -i & 0 \end{array}\right] \overset{II_v+I_v\cdot i}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$-2x_1 + x_2 = 0$

1 promjen. uzim. proizv. npr. $x_1 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}, \; t \neq 0$$

Ako za t uzmemo 1 imamo da je $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = i+2$.

Vektori v_1 i v_2 su linearno nezavisni pa je $P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{4i}{5} & \frac{1}{5} + \frac{2i}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{2i}{5} & \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1}AP = D$$

gdje je $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}$.

Matrica A je dijagonabilna.

(#) Neka je $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ dijagonabilna matrica.
Pokazati da A ima n linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$.

Rj.

Kako je A dijagonabilna to postoji invertibilna matrica P, sa elementima u $\mathbb{R}$ takva da je $D = P^{-1}AP$ dijagonalna matrica sa elementima u $\mathbb{R}$. Označimo sa $v_1, \dots, v_n$ kolone od P, drugim riječima, napišimo

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Također označimo sa $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ elemente na dijagonali matrice D tj. napišimo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Jasno je da imamo $AP = PD$. Slijedi da

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & A_2v_2 & \dots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Izjednačavajući kolone dobićemo $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$.
Slijedi da matrica A ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sa odgovarajućim svojstvenim vektorima $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Kako je P invertibilna matrica i $v_1, v_2, \dots, v_n$ su kolone od P, slijedi da su svojstveni vektori linearno nezavisni.

(#) Pretpostavimo da matrica $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, kojima odgovaraju svojstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Pokazati da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni.

Rj.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno zavisni. Tada postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ne sve nula, t.d.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \qquad \dots (1)$$

Tada

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_n A v_n = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n = 0$$

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n = 0 \qquad \dots (2)$$

Kako su $v_1, v_2, \dots, v_n$ svojstveni vektori a time i različiti od nule, slijedi da najmanje dva broja iz skupa $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ su različiti od nule, a odatle slijedi da u skupu $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ nisu sve nule. Množeći (1) sa λ_n i oduzimajući od (2) dobićemo

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$$

Primjetimo da kako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ različiti, to su i svi brojevi $\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n$ nenula. Slijedi da su i vektori $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ linearno nezavisni.

Da sumiramo, možemo eliminisati jedan vektor i opet dobiti linearno zavisan skup. Ponavljajući ovaj argument konačno mnogo puta, doći ćemo do linearno zavisnog skupa od jednog vektora, što je absurdno.